DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-158-167
УДК 517.977.5

ВЫРОЖДЕННАЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© И. Ю. Андреева, А. С. Шляхов

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: ira.iyandreeva.andreeva@mail.ru, aleksandr.shlyakhov@gmail.com

Аннотация. Рассматривается вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации с постоянным запаздыванием в системе и в функционале. В ранее полученных результатах авторов удалось сократить число уравнений, описывающих параметры оптимального управления. Благодаря этому впервые для таких задач просчитаны модельные примеры.
Ключевые слова: вырожденная линейно-квадратичная задача; оптимальное управление; импульсное управление; последействие

Введение

Исследование вырожденных линейно-квадратичных задач оптимизации с запаздыванием является актуальным, так как для практических задач факт вырожденности функционала встречается достаточно часто. Данная задача рассматривалась в работах [1], [2]. Невырожденные линейно-квадратичные задачи для систем с последействием рассматривались в [3], [4].

1. Основные понятия

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[v(\cdot)] = x^T(T)Sx(T) + \int\limits_{t_0}^{T} \Big[x^T(t)\Phi_0(t)x(t) + x^T(t)\int\limits_{-\tau}^{0} \Phi_1(t,\theta)x(t+\theta)d\theta +$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0} x^T(t+\theta)\Phi_1^T(t,\theta)d\theta\, x(t) + \int\limits_{-\tau}^{0} x^T(t+s)\Phi_2(t,s)x(t+s)ds +$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-505а).

$$+\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} x^T(t+\theta)\Phi_3(t,\theta,\rho)x(t+\rho)d\theta d\rho + x^T(t-\tau)\Phi_4(t)x(t-\tau)\Big]\, dt, \tag{1}$$

где $\Phi_0(\cdot)$, $\Phi_1(\cdot,\cdot)$, $\Phi_2(\cdot,\cdot)$, $\Phi_3(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\Phi_4(\cdot)$ — симметричные (за исключением $\Phi_3(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\Phi_1(\cdot,\cdot)$) непрерывные по совокупности переменных матрицы-функции размерности $n\times n$, S — неотрицательно определенная симметричная матрица с постоянными элементами вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_\tau(t)x(t-\tau) + \int_{-\tau}^{0} G(t,\theta)x(t+\theta)d\theta + B(t)\dot{v}(t) \tag{2}$$

с начальным условием $x(t)=\varphi(t)$, при $t_0-\tau\le t\le t_0$, которую назовем задачей **1**. Здесь $x(t)$, $\varphi(t)$ — вектор-функции размерности n, $v(t)$ — вектор-функция размерности m, $A(t)$, $A_\tau(t)$ — непрерывные матрицы-функции размерности $n\times n$, $G(t,\theta)$ — непрерывная по совокупности переменных $n\times n$–матрица-функция, $B(t)$ — непрерывно дифференцируемая матрица-функция размерности $n\times m$.

В работах [1], [2] данная задача была решена, и результаты этого решения отражены в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть для* $t\in[t_0,T]$ *выполнены условия*

1) $\det\Big(B^T(t)\Phi_0(t)B(t)+P_6(t,0)\Big)\ne 0$,

2) матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau}\Phi_0(t) & \Phi_1(t,\theta) \\ \Phi_1^T(t,\theta) & \Phi_2(t,\theta) \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена при $\theta\in[-\tau,0]$,

3) матрица $\Phi_3(t,\theta,\rho)$ *имеет структуру*

$$\Phi_3(t,\theta,\rho)=\widetilde{\Phi}_3(t,\theta)\,\widetilde{\Phi}_3(t,\rho),$$

4) матрица $\Phi_4(t)$ *неотрицательно определена,*
а матрицы $P(t)$, $P_4(t,s)$, $P_6(t,r)$, $P_1(t,\theta_1)$, $P_5(t,p)$, $Q(t,\theta)$, $P_2(t,\theta,\theta_1)$, $R(t,\theta,\rho)=R^T(t,\rho,\theta)$, $P_3(t,\theta_1,\theta_2)=P_3^T(t,\theta_2,\theta_1)$ *являются решением системы уравнений*

$$\frac{dP(t)}{dt}+Q(t,0)+Q^T(t,0)+P^T(t)A(t)+A^T(t)P(t)+P_4(t,0)+\Phi_0(t)=$$
$$=F_0^T(t)H^{-1}(t)F_0(t),$$
$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)Q(t,\theta)+R(t,0,\theta)+P(t)G(t,\theta)+A^T(t)Q(t,\theta)+\Phi_1(t,\theta)=$$
$$=F_0^T(t)H^{-1}(t)F_1(t,\theta),$$
$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)R(t,\theta,\rho)+G^T(t,\theta)Q(t,\rho)+Q^T(t,\theta)G(t,\rho)+\Phi_3(t,\theta,\rho)=$$
$$=F_1^T(t,\theta)H^{-1}(t)F_1(t,\rho),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Big)P_1(t,\theta_1)+P_2(t,0,\theta_1)+A^T(t)P_1(t,\theta_1)+P(t)G(t,\theta_1)B(t+\theta_1)+$$
$$+\Phi_1(t,\theta_1)B(t+\theta_1)=F_0^T(t)H^{-1}(t)F_2(t,\theta_1),$$
$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Big)P_2(t,\theta,\theta_1)+Q^T(t,\theta)G(t,\theta_1)B(t+\theta_1)+G^T(t,\theta)P_1(t,\theta_1)+$$
$$+\Phi_3(t,\theta,\theta_1)B(t+\theta_1)=F_1^T(t,\theta)H^{-1}(t)F_2(t,\theta_1),$$
$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta_1}-\frac{\partial}{\partial\theta_2}\Big)P_3(t,\theta_1,\theta_2)+B^T(t+\theta_1)G^T(t,\theta_1)P_1(t,\theta_2)+$$
$$+P_1^T(t,\theta_1)G(t,\theta_2)B(t+\theta_2)+B^T(t+\theta_1)\Phi_3(t,\theta_1,\theta_2)B(t+\theta_2)=$$
$$=F_2^T(t,\theta_1)H^{-1}(t)F_2(t,\theta_2),$$
$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial s}\Big)P_4(t,s)+\Phi_2(t,s)=0,\ \ \Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial p}\Big)P_5(t,p)+\Phi_2(t,p)B(t+p)=0,$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial r}\Big)P_6(t,r)+B^T(t+r)\Phi_2(t,r)B(t+r)=0 \tag{3}$$

при граничных условиях

$$P(T)=N,\quad Q(T,\theta)=R(T,\theta,\rho)=P_1(T,\theta_1)=$$
$$=P_2(T,\theta,\theta_1)=P_3(T,\theta_1,\theta_2)=P_4(T,s)=P_5(T,p)=P_6(T,r)=0,$$
$$P(t)A_\tau(t)B(t-\tau)=P_1(t,-\tau),\ \ B^T(t-\tau)A_\tau^T(t)Q(t,\theta)=P_2^T(t,\theta,-\tau),$$
$$A_\tau^T(t)Q(t,\theta)+Q^T(t,\theta)A_\tau(t)=R^T(t,\theta,-\tau)+R(t,-\tau,\theta),$$
$$A_\tau^T(t)P(t)=Q^T(t,-\tau),\ \ A_\tau^T(t)P_1(t,\theta_1)=P_2(t,-\tau,\theta_1),$$
$$B^T(t-\tau)A_\tau^T(t)P_1(t,\theta_1)+P_1^T(t,\theta_1)A_\tau(t)B(t-\tau)=P_3^T(t,\theta_1,-\tau)+P_3(t,-\tau,\theta_1),$$
$$\Phi_4(t)=P_4(t,-\tau),\ \ \Phi_4(t)B(t-\tau)=P_5(t,-\tau),\ \ B^T(t-\tau)\Phi_4(t)B(t-\tau)=P_6(t,-\tau),$$

для $t<T,\ \ -\tau\le\theta,\theta_1,\theta_2,\rho,p,r,s\le 0,$ *где*

$$F_0(t)=P_1^T(t,0)+B_1^T(t)P(t)+P_5^T(t,0)+B^T(t)\Phi_0(t),$$
$$F_1(t,\theta)=B_1^T(t)Q(t,\theta)+P_2^T(t,\theta,0)+B^T(t)\Phi_1(t,\theta),$$
$$F_2(t,\theta_1)=B_1^T(t)P_1(t,\theta_1)+P_3^T(t,\theta_1,0)+B^T(t)\Phi_1(t,\theta_1)B(t+\theta_1),$$
$$H(t)=B^T(t)\Phi_0(t)B(t)+P_6(t,0),\ \ B_1(t)=A(t)B(t)-\dot B(t).$$

Тогда на $[t_0,T]$ *оптимальное управление примет вид*

$$\dot v(t)=\Delta v(t_0,\varphi(\cdot))\,\delta(t-t_0)+Z_1(t)x(t)+Z_2(t)x(t-\tau)+$$
$$+\int\limits_{-\tau}^{0}Z_3(t,\theta)x(t+\theta)\,d\theta+\Delta v(T,x(T-0))\,\delta(t-T),$$

где величины скачков функции $v(t)$, *определяются формулами*

$$\Delta v(t_0, \varphi(\cdot)) = W_0(t_0)\varphi(t_0) + \int\limits_{-\tau}^{0} W_1(t_0, \theta)\varphi(t_0 + \theta)\, d\theta,$$

$$\Delta v(T, x(T-0)) = -\Big(B^T(T)SB(T)\Big)^{-} B^T(T)Sx(T-0) +$$
$$+\Big(E - \Big(B^T(T)SB(T)\Big)^{-} B^T(T)SB(T)\Big)p$$

и

$$W_0(t) = -H^{-1}(t)\Big[P_1(t,0) + B_1^T(t)P(t) + P_5(t,0) + B^T(t)\Phi_0(t)\Big],$$

$$W_1(t,\theta) = -H^{-1}(t)\Big[B_1^T(t)Q(t,\theta) + P_2^T(t,\theta,0) + B^T(t)\Phi_1(t,\theta)\Big],$$

$$W_2(t,\theta_1) = -H^{-1}(t)\Big[B_1^T(t)P_1(t,\theta_1) + P_3^T(t,\theta_1,0) + B^T(t)\Phi_1(t,\theta_1)B(t+\theta_1)\Big].$$

$$Z_1(t) = -\Big[\frac{dW_0(t)}{dt} + W_0(t)A(t) + W_1(t,0)\Big],\ \ Z_2(t) = -\Big[W_0(t)A_\tau(t) - W_1(t,-\tau)\Big],$$
$$Z_3(t,\theta) = -\Big[G(t,\theta) + \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta}\Big)W_1(t,\theta)\Big]$$

для $t \in (t_0, T)$.

2. Упрощение системы для нахождения коэффициентов оптимального управления

Основным результатом по упрощению системы уравнений (3) является ее приведение к системе с меньшим количеством уравнений. Рассмотрим второе и четвертое уравнение этой системы. Умножим второе уравнение на $B(t+\theta)$ справа, а затем из полученного уравнения вычтем четвертое уравнение, для которого в качестве второго параметра возьмем θ. В результате выполнения указанных действий получим следующее уравнение:

$$\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta}\Big)Q(t,\theta)\Big)\ B(t+\theta) - \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta_1}\Big)P_1(t,\theta_1) + R(t,0,\theta)\,B(t+\theta) -$$
$$-P_2(t,0,\theta_1) + A^T(t)Q(t,\theta)\,B(t+\theta) - A^T(t)P_1(t,\theta) =$$
$$= F_0^T(t)H^{-1}(t)F_1(t,\theta)\,B(t+\theta) - F_0^T(t)H^{-1}(t)F_2(t,\theta).$$

Подставим в это уравнение:

$$F_1(t,\theta) = B_1^T(t)Q(t,\theta) + P_2^T(t,\theta,0) + B^T(t)\Phi_1(t,\theta),$$

$$F_2(t,\theta_1) = B_1^T(t)P_1(t,\theta_1) + P_3^T(t,\theta_1,0) + B^T(t)\Phi_1(t,\theta_1)B(t+\theta_1).$$

В результате получим уравнение

$$\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)Q(t,\theta)\Big)\,B(t+\theta)-\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Big)P_1(t,\theta_1)+R(t,0,\theta)\,B(t+\theta)-$$

$$-P_2(t,0,\theta_1)+A^T(t)Q(t,\theta)\,B(t+\theta)-A^T(t)P_1(t,\theta)=$$

$$=F_0^T(t)H^{-1}(t)\,[B_1^T(t)Q(t,\theta)B(t+\theta)-B_1^T(t)P_1(t,\theta)+P_2^T(t,\theta,0)B(t+\theta)-P_3^T(t,\theta,0)].$$

Очевидно, что данное уравнение станет тождеством, если выполняются следующие условия:

$$B(t+s)=const,\ \ P_1(t,\theta)=Q(t,\theta)\,B(t+\theta),\ \ P_2(t,0,\theta)=R(t,0,\theta)\,B(t+\theta)$$

$$P_3^T(t,\theta,0)=P_2^T(t,\theta,0)\,B(t+\theta).$$

Проведя аналогичные рассуждения с остальными уравнениями системы и граничными условиями, можно прийти к выводу, что при выполнении равенств:

$$P_1(t,\theta)=Q(t,\theta)\,B(t+\theta),\ \ P_2(t,0,\theta)=R(t,0,\theta)\,B(t+\theta),\ \ P_3^T(t,\theta,0)=P_2^T(t,\theta,0)\,B(t+\theta),$$

$$P_5(t,s)=P_4(t,s)\,B(t+s),\ \ P_6(t,s)=B^T(t+s)\,P_4(t,s)\,B(t+s)$$

система примет вид

$$\frac{dP(t)}{dt}+Q(t,0)+Q^T(t,0)+P^T(t)A(t)+A^T(t)P(t)+P_4(t,0)+\Phi_0(t)=$$

$$=F_0^T(t)H^{-1}(t)F_0(t),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)Q(t,\theta)+R(t,0,\theta)+A^T(t)Q(t,\theta)+P(t)\,G(t,\theta)+\Phi_1(t,\theta)=$$

$$=F_0^T(t)H^{-1}(t)F_1(t,\theta),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)R(t,\theta,\rho)+G^T(t,\theta)\,Q(t,\rho)+Q^T(t,\theta)\,G(t,\rho)+\Phi_3(t,\theta,\rho)=$$

$$=F_1^T(t,\theta)H^{-1}(t)F_1(t,\rho),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial s}\Big)P_4(t,s)+\Phi_2(t,s)=0$$

с граничными условиями

$$P(T)=N,\quad Q(T,\theta)=R(T,\theta,\rho)=P_4(T,s)=0,\ \ \Phi_4(t)=P_4(t,-\tau),$$

$$2A_\tau^T(t)Q(t,\theta)=R^T(t,\theta,-\tau)+R(t,-\tau,\theta),\ \ A_\tau^T(t)P(t)=Q^T(t,-\tau),$$

при $t<T,\ \ -\tau\le\theta,\theta_1,\theta_2,\rho,p,r,s\le 0,$ где

$$F_0(t)=Q(t,\theta)+P(t)+P_4(t,0)+\Phi_0(t),\ \ F_1(t,\theta)=Q(t,\theta)+R(t,\theta,0)+\Phi_1(t,\theta),$$

$$H(t)=\Phi_0(t)+P_4(t,0).$$

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу минимизации функционала (**1**) вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t-5) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{v}(t)$$

с начальными условиями: $\varphi(t) = 1,\ t \in [-5; 0]$. Из постановки задачи имеем, что

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ A_\tau = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ t_0 = 0,\ \tau = 5,\ T = 1,\ G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},\ B_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для данной задачи будут иметь место следующие равенства:

$$P_4(t,s) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_5(t,s),\ (1\ \ 1) P_4(t,s) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_6(t,s),\ Q(t,\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_1(t,\theta),$$

$$R(t,\rho,\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_2(t,\rho.\theta),\ P_2^T(t,\rho,\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_3^T(t,\rho,\theta),$$

с учетом которых система для нахождения неизвестных функций примет вид:

$$\frac{dP(t)}{dt} + Q(t,0) + Q^T(t,0) + P^T(t) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} P(t) + P_4(t,0) + \Phi_0(t) =$$

$$= F_0^T(t) H^{-1}(t) F_0(t),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta}\Big) Q(t,\theta) + R(t,0,\theta) + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Q(t,\theta) + \Phi_1(t,\theta) = F_0^T(t) H^{-1}(t) F_1(t,\theta),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho}\Big) R(t,\theta,\rho) + \Phi_3(t,\theta,\rho) = F_1^T(t,\theta) H^{-1}(t) F_1(t,\rho),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\Big) P_4(t,s) + \Phi_2(t,s) = 0,$$

где

$$F_0(t) = (1\ \ 1)\, Q^T(t,0) + (2\ \ 2)\, P(t) + (1\ \ 1)\, P_4^T(t,0) + (1\ \ 1)\, \Phi_0(t),$$

$$F_1(t,\theta) = (2\ \ 2)\, Q(t,\theta) + (1\ \ 1)\, R^T(t,\theta,0) + (1\ \ 1)\, \Phi_1(t,\theta),$$

$$H(t) = (1\ \ 1)\, \Phi_0(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1\ \ 1)\, P_4(t,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия для этой системы будут следующими:

$$P(T) = N = \begin{pmatrix} a_1(1 - \frac{a_1}{a_1+a_2})^2 + \frac{a_1^2 a_2}{(a_1+a_2)^2} & \frac{2a_1 a_2}{a_1+a_2} - \frac{a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2}{(a_1+a_2)^2} \\ \frac{2a_1 a_2}{a_1+a_2} - \frac{a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2}{(a_1+a_2)^2} & a_2(1 - \frac{a_2}{a_1+a_2})^2 + \frac{a_1 a_2^2}{(a_1+a_2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$Q(T,\theta) = R(T,\theta,\rho) = P_4(T,s) = 0,\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P(t) = Q^T(t,-5),$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q(t,\theta) + Q^T(t,\theta) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R^T(t,\theta,-5) + R(t,-5,\theta), \;\; \Phi_4(t) = P_4(t,-5)$$

для $t < 1$, $-5 \le \theta$, ρ, $s \le 0$. В результате решения данной системы уравнений с указанными граничными условиями были получены неизвестные функции для нахождения оптимального управления. Тогда вид оптимального управления будет следующим:

$$\dot{v}_r(t) = \dot{W}_0^1(t)\, x(t) + 2x_1(t)\, W_0^1(t) + x_2(t)\, W_0^1(t) - x_1(t-\tau)\, W_0^1(t) +$$

$$+ x_2(t-\tau)\, W_0^1(t) - \dot{W}_0^1(t)\, v(t),$$

величины скачков функции $v(t)$, соответственно, будут определятся формулами:

$$\Delta v(t_0) = v(t_0) - v(0) = (W_0^1(t) \;\; 0) \left(\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \right) = W_0^1(0)\, x_1(0-),$$

$$\Delta v(T, x(T-0)) = -(B^T(T) S B(T))^{-1} B^T(T) S x(T-0),$$

где

$$F_0(t) = \left(e^{4(T-t)} + 1 - \frac{(t-T)^2}{2} - \Phi_0^1(t) - \frac{3\, e^{T-t}}{2} \quad 0 \right),$$

$$H(t) = \Phi_0^1(t) + \Phi_0^2(t) + \Phi_0^3(t) + \Phi_0^4(t) - (t-T)^2, \;\; W_0(t) = -H^{-1}(t)\, F_0(t) = \left(W_0^1(t) \quad 0 \right),$$

$$\Phi_0^1(t) = \frac{-16e^{8(T-t)} + 10e^{5(T-t)} - 40e^{4(T-t)} + 5e^{2(T-t)} - 18e^{(T-t)}}{-8 + 6e^{T-t} + 16e^{4(T-t)}} +$$

$$+ \frac{(8e^{4(T-t)} + 4e^{(T-t)} - 4)\,(T-t)^2 + 8}{-8 + 6e^{T-t} + 16e^{4(T-t)}},$$

$$\Phi_0^2(t) = \Phi_0^3(t) = -e^{4(T-t)} - \frac{e^{T-t}}{2},$$

$$\Phi_0^4(t) = \frac{-8e^{5(T-t)} - 32e^{4(T-t)} - 4e^{2(T-t)} - e^{T-t}(6 - (t-T)^2)}{-64e^{8(T-t)} - 2e^{5(T-t)} - 4e^{2(T-t)} + e^{T-t}(t-T)^2},$$

$$W_0^1(t) = \frac{-8e^{5(T-t)} - 32e^{4(T-t)} - 4e^{2(T-t)} + e^{(T-t)}(T-t)^2}{64e^{8(T-t)} + 32e^{5(T-t)} + 4e^{2(T-t)} - e^{T-t}(T-t)^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреева И.Ю., Сесекин А.Н.* Вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации с запаздыванием по времени // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 43-54.

2. *Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В.* Вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации для систем с последействием // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: тр. 9 Междунар. Четаевской конф., посвящ. 105-летию Н.Г. Четаева. Иркутск, 2007. Т. 3. С. 196-205.

3. *Колмановский В.Б., Майзенберг Т.Л.* Оптимальные оценки состояния системы и некоторые задачи управления уравнениями с последействием // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 3. С. 446-456.

4. *Янушевский Р.Т.* Управление объектами с запаздыванием. Москва: Наука, 1978. 416 с.

Поступила в редакцию 19 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Андреева Ирина Юрьевна, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, e-mail: ira.iyandreeva.andreeva@mail.ru

Шляхов Александр Сергеевич, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, аспирант, кафедра прикладной математики, e-mail: aleksandr.shlyakhov@gmail.com

Для цитирования: *Андреева И.Ю., Шляхов А.С.* Вырожденная линейно-квадратичная задача с запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 158–167. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-158-167

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-158-167

DEGENERATED LINEARLY-QUADRATIC PROBLEM WITH DELAY

I. Yu. Andreeva, A. S. Shlyakhov

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: ira.iyandreeva.andreeva@mail.ru, aleksandr.shlyakhov@gmail.com

Abstract. We consider a degenerate linear-quadratic problem optimization with a constant delay in the system and in the functional. In the previously obtained results of the authors, it was possible to reduce the number of equations describing the parameters of optimal control. Thanks to this, for the first time model examples are calculated for such problems.
Keywords: degenerate linearly-quadratic problem; optimal control; impulse control; aftereffect

REFERENCES

1. Andreeva I.Y., Sesekin A.N. Vyrozhdennaya lineyno-kvadratichnaya zadacha optimizatsii s zapazdyvaniem po vremeni [Degenerate linear-quadratic optimization problem with time delay]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1997, no. 7, pp. 43-54. (In Russian).

2. Sesekin A.N., Fetisova Y.V. Vyrozhdennaya lineyno-kvadratichnaya zadacha optimizatsii dlya sistem s posledeystviem [Degenerate linear-quadratic optimization problem for systems with aftereffect]. *Trudy 9 Mezhdunarodnoy Chetaevskoy konferentsii «Analiticheskaya mekhanika, ustoychivost' i upravlenie dvizheniem», posvyashchennoy 105-letiyu N.G. Chetaeva* [Proceedings of the International Chetaev Conference "Analytical Mechanics, Stability and Motion Control" dedicated to the 105th anniversary of N.G. Chetayev]. Irkutsk, 2007, vol. 3, pp. 196-205. (In Russian).

3. Kolmanovskiy V.B., Mayzenberg T.L. Optimal'nye otsenki sostoyaniya sistemy i nekotorye zadachi upravleniya uravneniyami s posledeystviem [Optimum estimates of the state of the system and some problems of control of equations with aftereffect]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, no. 3, pp. 446-456. (In Russian).

4. Yanushevskiy R.T. *Upravlenie ob"ektami s zapazdyvaniem* [Management of Objects with Delay]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 416 p. (In Russian).

Received 19 March 2018
Reviewed 24 April 2018
Accepted for press 5 June 2018
There is no conflict of interests.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-01-505a).

Andreeva Irina Yurevna, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Applied Mathematics Department, e-mail: ira.iyandreeva.andreeva@mail.ru

Shlyakhov Alexander Sergeevich, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Post-Graduate Student of the Department of Applied Mathematics, e-mail: aleksandr.shlyakhov@gmail.com

For citation: Andreeva I.Yu., Shlyakhov A.S. Vyrozhdennaya lineyno-kvadratichnaya zadacha s zapazdyvaniem [Degenerated linearly-quadratic problem with delay]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 158–167. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-158-167 (In Russian, Abstr. in Engl.).